ỨNG DỤNG WAVELETS TRONG NỘI SUY DỊ THƯỜNG ĐỘ CAO

LƯƠNG BẢO BÌNH
Trường Đại học Bách Khoa - ĐHQG TPHCM

Tóm tắt:

Bài báo giới thiệu cách tiếp cận wavelets ứng dụng trong việc nội suy các đại lượng trắc địa, phương pháp này có thể tính toán nội suy cho các vị trí bất kỳ từ các giá trị đầu vào với phân bố không gian bất kỳ. Sau phần nền tảng lý thuyết là hai tính toán thử nghiệm sử dụng các giá trị từ mô hình EGM 2008, một cho lưới đồng góc toàn cầu và một cho mạng lưới địa phương với các vị trí phân bố không đều, nhằm minh họa và xác thực tính đúng đắn của phương pháp. Một cách tóm tắt, wavelets gồm hai bước: "chia" tín hiệu đầu vào thành các mức khác nhau (tương ứng với các độ và bậc điều hòa cầu), sau đó tổng hợp lại thành tín hiệu đầu ra (ở những vị trí cần giá trị nội suy). Ẩn bên dưới wavelets là nhân tái tạo sử dung hàm cơ sở cầu và đa thức Legendre, điều này giúp cho quy trình vẫn giữ được tính chất điều hòa cầu cho các giá trị nội suy, là ưu điểm nổi bật so với các phương pháp nội suy quen thuộc khác. Tính đúng đắn và độ chính xác của phương pháp đã được minh chứng thông qua hai tính toán thử nghiệm. Ở mức độ toàn cầu, một lưới đồng góc 6^0 các giá trị dị thường độ cao đến độ và bậc 10 đã được dùng để nội suy cho chính các vị trí này cho kết quả chênh lệch ở mức 10^{-12} m. Ở mức độ khu vực, 5796 giá trị dị thường độ cao (độ và bậc từ 32 đến 900) tại châu Âu cũng được "tự nội suy" với kết quả chênh lệch 5 cm, bằng đúng với độ nhiễu ngẫu nhiên đã được thêm vào trước đó. Điều này cùng với độ và bậc điều hòa cao và vị trí điểm đo không phân bố đều là những khó khăn mang tính thực tế đã được chọn cho tính toán thử nghiệm thứ hai và wavelets vẫn cho kết quả tốt.

Từ khóa: wavelets, nhân tái tạo (reproducing kernel), điều hòa cầu, nội suy

1. Đặt vấn đề

Trọng lực và các đại lượng liên quan như dị thường độ cao, dị thường trọng lực, độ lệch dây dọi thường được cung cấp từ các mô hình (toàn cầu hoặc khu vực) dưới dạng lưới điểm với các kích thước ô lưới nhất định, chẳng hạn 30 phút, 5 phút, 2.5 phút, 1 phút. Để có được giá trị tại các vị trí cụ thể mà mình quan tâm, người dùng phải tiến hành nội suy từ các giá trị mắt lưới. Có nhiều phương pháp nội suy quen thuộc như tuyến tính, đa thức, spline, kriging, collocation. Tuy nhiên, các phương pháp này không bảo đảm việc giữ được tính chất điều hòa (harmonic) của đại lượng nội suy, mà về nguyên tắc là tính chất chung của các đại lượng trắc địa kể trên.

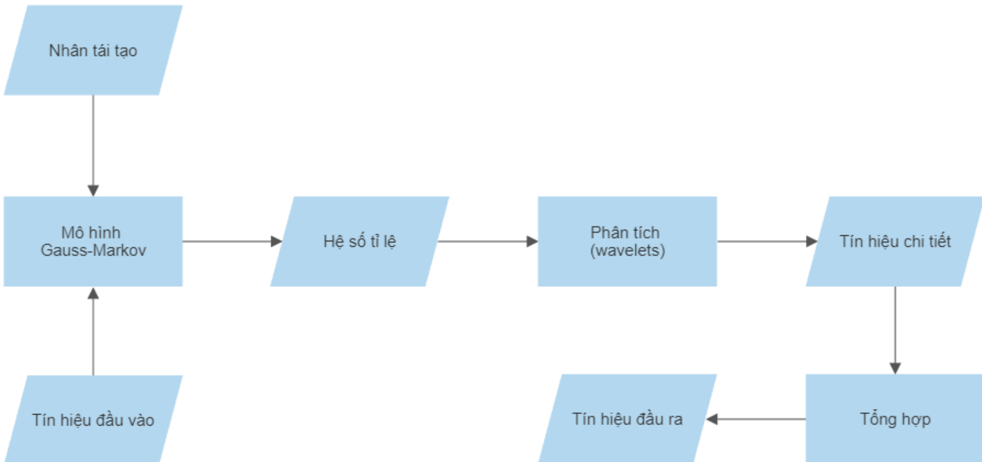
Ngày nhận bài: 1/5/2022, ngày chuyển phản biện: 5/5/2022, ngày chấp nhận phản biện: 9/5/2022, ngày chấp nhận đăng: 28/5/2022

Một cách tiếp cận khác cho vấn đề này là wavelets.Việc ứng dụng wavelets trong trắc địa đã được nói đến trong một số tài liệu, chẳng hạn như [1] và [2]. Tuy nhiên, cái ta cần ở đây là quy trình tính toán cho một bài toán cụ thể là nội suy đại lượng trắc địa. Bài báo này sẽ giới thiệu công thức tính toán cụ thể để áp dụng nguyên tắc của wavelets, thông qua nhân tái tạo và đa thức Legendre giúp bảo toàn tính hài hòa, để nội suy đại lượng trắc địa thường dùng là dị thường độ cao. Kèm theo đó là hai thử nghiệm được thiết kế ở cả phạm vi toàn cầu và khu vực để kiểm chứng tính đúng đắn và đánh giá độ chính xác của phương pháp tính toán này.

2. Cơ sở lý thuyết của phương pháp

Ý tưởng chính của wavelets là việc chia dữ liệu đầu vào thành những tín hiệu chi tiết mịn hơn thông qua bộ lọc thông thấp (low-pass). Áp dụng cho bài toán nội suy dị thường độ cao (hoặc các dữ liệu trọng lực nói chung), phương pháp này gồm hai bước chính:

- Phân tích: chia tách tín hiệu của các nguồn dữ liệu đầu vào thành nhiều cấp tín hiệu chi tiết;
- Tổng hợp: kết hợp các tín hiệu chi tiết để tái tạo dữ liệu đầu ra.



Hình 1: Sơ đồ tính toán

Quy trình được minh họa qua sơ đồ ở hình 1; trong đó, quan trọng là nhân tái tạo (reproducing kernel) giúp thiết lập cầu nối giữa hai vị trí (gốc và nội suy) và hàm wavelet cầu sẽ lọc tín hiệu thành các cấp chi tiết riêng biệt. Cơ sở toán học của phương pháp sẽ được giải thích ngắn gọn bên dưới.

Gọi Ω_R là hình cầu bán kính R và $L^2(\Omega_R)$ là không gian của tất cả các hàm thực khả tích bậc 2 F trên Ω_R, các điều hòa cầu $Y_{n,m}(\xi)$ độ và bậc nm tạo thành một cơ sở trực giao hoàn chỉnh của $L^2(\Omega_R)$. Hàm $F \in L^2(\Omega_R)$ có thể được biểu diễn một cách duy nhất thông qua chuỗi Fourier

$$\mathrm{F}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} F_{n,m} Y_{n,m}(\xi) \qquad (1)$$

với $\xi \in \Omega$, $F_{n,m}$ là hệ số Stokes được tính bằng biến đổi Fourier cầu.

Cho thế (nhiễu) trọng lực F trên mặt cầu Ω_R, giá trị tiếp nối hướng lên (upward continuation) có thể được tính

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} F_{n,m} H_{n,m}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

trong đó, hàm

$$H_{n,m}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^{n+1} Y_{n,m}(\xi) \tag{3}$$

là điều hòa cầu khối (solid spherical harmonics).

Mối quan hệ giữa điều hòa cầu và đa thức Legendre được cho bởi [3]

$$\sum_{m=-n}^{n} Y_{n,m}(\xi).Y_{n,m}(\eta) = \frac{2\mathrm{n}+1}{4\pi} P_n(\xi^T \eta) \tag{4}$$

trong đó $\boldsymbol{\xi}$ và $\boldsymbol{\eta}$ là các vector đơn vị theo phương hướng tâm của Ω_R.

Phương trình (4) chính là nền tảng cho việc tính wavelets cầu (xấp xỉ đến độ n_{max} nhất định)

$$\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{2\mathrm{n}+1}{4\pi\mathrm{R}^2}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^{n+1} B_n P_n(\xi^T \xi_k) \tag{5}$$

với $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{\xi} \in \Omega_R ext$ ($\Omega_R ext$ là không gian bên ngoài bao gồm mặt cầu Ω_R), $\boldsymbol{x}_k = R\boldsymbol{\xi}_k \in \Omega_R$, và B_n là hệ số Legendre phản ánh tính phổ của tín hiệu.

Như vậy, tín hiệu $F(\boldsymbol{x})$ ban đầu có thể được đại diện bởi wavelets cầu theo phương trình (6)

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} c_k \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) \tag{6}$$

với N là số lượng vị trí $\boldsymbol{x}$ và c_k là hệ số đóng vai trò tương tự hệ số Stokes $F_{n,m}$ trong cách tiếp cận điều hòa cầu.

Vấn đề quan trọng tiếp theo là nhân tái tạo, được giới thiệu bởi [4]

$$K_{rep}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{2\mathrm{n}+1}{4\pi\mathrm{R}^2}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^{n+1} B_n P_n(\xi^T \xi_k) \tag{7}$$

thỏa mãn điều kiện [5]

$$F(\boldsymbol{x}) = (K_{rep} * \mathrm{F})(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

Viết lại tích chập (convolution) $K_{rep} * F$ dưới dạng chuỗi khai triển của hàm cơ sở cầu K_{rep}, ta có thể thay thế phương trình (6) bằng phương trình (9) sử dụng nhân tái tạo

$$(K_{rep} * \mathrm{F})(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} d_k K_{rep}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) = k_{rep}(\boldsymbol{x})^T \mathrm{d} \tag{9}$$

với $\boldsymbol{k}_{rep}$ và $\boldsymbol{d}$ lần lượt là các vector của hàm nhân tái tạo và hệ số tỉ lệ.

Phương trình (8) cũng cho thấy mối liên hệ giữa hàm cơ sở cầu và tích chập, một công cụ cơ bản của bộ lọc.

Phương trình (10) giới thiệu hàm tỉ lệ cầu

$$\Phi_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) = \sum_{n=0}^{n_{jmax}} \frac{2\mathrm{n}+1}{4\pi\mathrm{R}^2}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^{n+1} \Phi_{j;n} P_n(\xi^T \xi_k) \tag{10}$$

ở cấp j, với hệ số Legendre $\mathrm{F}_{j;n} = 0$ khi $n > n_j$. Điều này có nghĩa hàm tỉ lệ hoạt động như một bộ lọc thông thấp (low-pass). Từ đó, tín hiệu

$$F_{j+1}(\boldsymbol{x}) = (\Phi_{j+1} * \mathrm{F})(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

có thể được phân tích thành phiên bản mịn hơn

$$F_j(\boldsymbol{x}) = (\Phi_j * \mathrm{F})(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

và phần tín hiệu chi tiết

$$G_j(\boldsymbol{x}) = (\Psi_j * \mathrm{F})(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

chứa các thành phần của $F_{j+1}(\boldsymbol{x})$ bị thiếu trong $F_j(\boldsymbol{x})$.

Trong khi hàm tỉ lệ cầu hoạt động như một bộ lọc thông thấp thì hàm wavelet cầu

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) = \sum_{n=0}^{n_{j+1max}} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \Psi_{j;n} P_n\left(\xi^T \xi_k\right) \tag{14}$$

có thể được xem như một bộ lọc thông dải (band-pass) được xác định bởi hệ số Legendre

$$\Psi_{j;n} = \Phi_{j+1;n} - \Phi_{j;n} \tag{15}$$

Cuối cùng, tín hiệu $F(\boldsymbol{x})$ có thể được biểu diễn (theo dải phổ)

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = F_{j'}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=j'}^{J} G_j(\boldsymbol{x}) + \Delta F_{J+1}(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

trong đó bao gồm phiên bản mịn (ở cấp j'), các tín hiệu chi tiết ở cấp từ j' đến (cấp tối đa) J, và phần dư

$$\Delta F_{J+1}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{F}(\boldsymbol{x}) - F_{J+1}(\boldsymbol{x}) = \left(\Delta\Phi_{J+1} * F\right)(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

Tóm lại, theo như đúng tên gọi wavelets, ý tưởng cơ bản của phương pháp này là chia nhỏ tín hiệu đầu vào theo dải phổ. Ngoài ra, yếu tố quan trọng khác là nhân tái tạo giúp "lan truyền" tín hiệu đến các vị trí cần tính toán. Và cuối cùng, tín hiệu ở các cấp chi tiết khác nhau sẽ được tổng hợp thành tín hiệu đầu ra.

Phần tiếp theo sẽ áp dụng cơ sở lý thuyết trên vào tính toán nội suy giá trị dị thường độ cao để đánh giá tính hiệu quả và độ chính xác của cách tiếp cận này.

3. Kết quả thử nghiệm và thảo luận

Để kiểm chứng tính đúng đắn cũng như độ chính xác khi tính toán nội suy của phương pháp, hai thử nghiệm được thiết kế với ý tưởng tổng quát như sau:

- Thử nghiệm 1 được thiết kế đơn giản nhằm mục đích kiểm chứng và minh họa tính chất bộ lọc dải phổ của wavelets. Dị thường độ cao của một lưới đồng góc toàn cầu sẽ được dùng để "nội suy" chính nó. Dù không mang tính thực tế nhưng việc "tự nội suy" này giúp loại bỏ hoàn toàn mọi sai số của dữ liệu trong đánh giá kết quả. Dải phổ của dữ liệu cũng được hạn chế ở mức thấp (tương ứng với độ và bậc điều hòa 10) để đơn giản hóa tính toán và dễ dàng minh họa bằng hình ảnh.

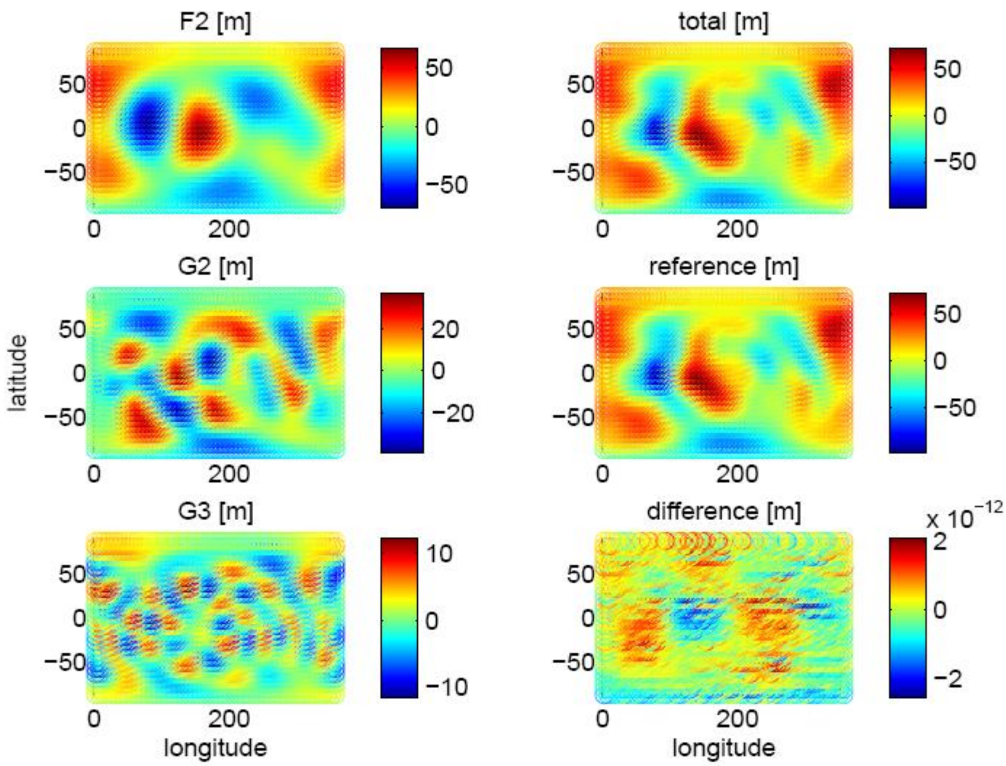
- Thử nghiệm 2 giúp đánh giá độ chính xác của phương pháp khi được áp dụng vào tính toán nội suy dị thường độ cao trong điều kiện gần với thực tế hơn: từ vị trí các điểm dữ liệu đầu vào phân bố không đều nội suy ra một lưới đồng góc khu vực, giá trị dị thường độ cao được tính đến độ và bậc điều hòa cao và bị thêm vào một nhiễu giả ngẫu nhiên đóng vai trò sai số.

3.1. Tái tạo dị thường độ cao ở độ và bậc điều hòa thấp cho lưới đồng góc toàn cầu

Đầu tiên, để kiểm tra tính đúng đắn và minh họa trực quan cho tiến trình wavelets, một mô phỏng mang tính đơn giản hóa được tiến hành như sau: một bộ số liệu dị thường độ cao ở độ và bậc điều hòa thấp phân bố trên lưới đồng góc toàn cầu sẽ được phân tích rồi tổng hợp lại theo như quy trình lý thuyết bên trên, hay nói cách khác là "tự nội suy" bộ số liệu cho chính các vị trí cũ của nó để so sánh kết quả nhận được với số liệu ban đầu, mà sự khác biệt chính là sai số của phương pháp.

Dị thường độ cao được tính từ mô hình EGM 2008 [6], sử dụng bộ hệ số điều hòa đến độ và bậc 10, tính bằng chương trình GeoH [7]. Giá trị dị thường độ cao này được tính cho một mạng lưới đồng góc toàn cầu với kích thước ô lưới 6^0 x 6^0 bao gồm 30 x 60 = 1800 điểm trải dài từ 87^0 vĩ Bắc đến 87^0 vĩ Nam và từ 0^0 kinh đến 354^0 kinh (6^0 kinh Tây). Việc chỉ sử dụng các hệ số điều hòa bậc thấp là để giảm số cấp tín hiệu chi tiết, thuận lợi cho việc minh họa bằng hình ảnh. Cụ thể ở đây với n_{max} = 10, áp dụng dyadic wavelets, thì chỉ cần 3 cấp tín hiệu là đủ bao phủ toàn bộ dải phổ: F_2 tương ứng với độ và bậc từ 2 đến 3, G_2 tương ứng với độ và bậc từ 4 đến 7, và G_3 chứa các tín hiệu với độ và bậc từ 8 đến 10.

Áp dụng các bước tính toán được thể hiện ở hình 1 vào bộ số liệu này, lần lượt chúng ta tính được hệ số tỉ lệ, phiên bản tín hiệu mịn F_2, các cấp tín hiệu chi tiết G_2 và G_3, và cuối cùng tính được tín hiệu tổng hợp đầu ra chính là tổng của $F_2 + G_2 + G_3$. Xin lưu ý là với tín hiệu bị "cắt cụt" (n_{max} =10) này thì phần dư ΔF không cần phải xét đến.



Hình 2: từ trên xuống dưới, bên trái: tín hiệu mịn, tín hiệu chi tiết cấp 2 và cấp 3; bên phải: tín hiệu tổng hợp đầu ra, giá trị tham khảo, và sự khác biệt giữa chúng

Hình 2 thể hiện các tín hiệu F_2, G_2, G_3 ở cột bên trái, từ trên xuống dưới, và tín hiệu tổng (giá trị tái tạo cần tính) ở trên cùng bên phải, ngoài ra còn có giá trị ban đầu (ở giữa bên phải) cũng như sự khác biệt giữa 2 giá trị này (dưới cùng bên phải), thể hiện sai số tính toán của phương pháp. Ta có thể thấy sự khác biệt giữa tín hiệu ban đầu và tín hiệu tái tạo áp dụng wavelets chỉ ở mức 10^{-12} m, hoàn toàn có thể bỏ qua mà không sợ phạm bất kỳ sai số nào. Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của phương pháp và quy trình tính toán được giới thiệu bên trên. Ngoài ra, các hình thể hiện các cấp tín hiệu F_2, G_2, và G_3 cũng minh họa rõ cho tính chất hoạt động như một bộ lọc của wavelets với mức chi tiết ngày càng cao ở các cấp tín hiệu cao hơn.

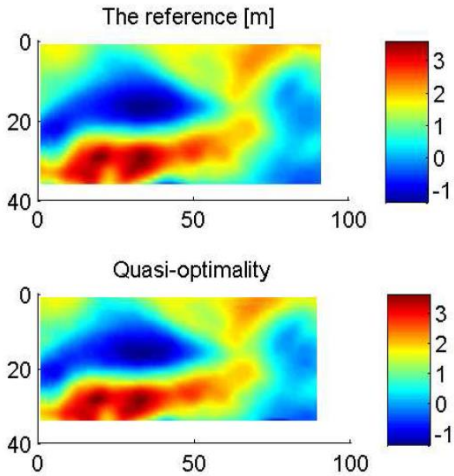
3.2. Nội suy dị thường độ cao ở độ và bậc điều hòa cao từ mạng lưới điểm gốc khu vực phân bố không đều

Nếu như thử nghiệm trên (mục 3.1) dùng bộ dữ liệu đơn giản, vốn được thiết kế chỉ với mục đích khẳng định tính đúng đắn của phương pháp thì ở thử nghiệm tiếp theo này, các yếu tố mang tính thực tế sẽ được xét đến.

Bộ dữ liệu đầu vào là dị thường độ cao tại 5796 vị trí phân bố không theo quy luật, cũng chính là các vị trí đo dị thường trọng lực thực tế tại châu Âu. Từ giá trị tại các vị trí này ta sẽ nội suy ra giá trị cho một lưới đồng góc bao phủ cùng khu vực, trải dài từ 46^0 vĩ Bắc đến 49.5^0 vĩ Bắc và từ 9^0 kinh Đông đến 18^0 kinh Đông, kích thước ô lưới là $0,1^0$ x $0,1^0$, bao gồm 36 x 91 = 3276 điểm. Giá trị nội suy ra sẽ được so sánh với bộ giá trị tham khảo để đánh giá tính chính xác của phương pháp nội suy.

Để có cùng cơ sở so sánh thì giá trị dị thường độ cao của 5796 điểm ban đầu và giá trị dị thường độ cao tham khảo tại 3276 điểm nội suy đều được tính từ cùng một nguồn là bộ hệ số điều hòa đến độ và bậc 900 của mô hình EGM 2008. Việc sử dụng đến độ và bậc 900 là để cân bằng giữa mong muốn giảm thiểu việc tính toán quá nhiều cấp tín hiệu nhưng vẫn bảo đảm tính chi tiết đủ cao. Một lưu ý quan trọng khác là thành phần bước sóng dài (lớn hơn kích thước khu vực) cần phải được khử trước khi tính toán, cụ thể ở đây là các hệ số điều hòa nhỏ hơn 32. Ngoài ra, để gần với các điều kiện khó khăn trong thực tế hơn, một tập giá trị nhiễu giả ngẫu nhiên với độ lệch chuẩn 5 cm được thêm vào giá trị dị thường độ cao của 5796 điểm ban đầu, đóng vai trò như sai số ngẫu nhiên.

Áp dụng cùng quy trình tính toán như ở thử nghiệm 1, cuối cùng ta thu được tín hiệu tổng là giá trị nội suy tại 3276 điểm, được thể hiện ở hình 3 bên dưới. Bên trên của hình 3 là giá trị tham khảo tại cùng 3276 điểm đó. Các cấp tín hiệu chi tiết không được thể hiện ở đây do số lượng quá nhiều cũng như vì việc minh họa tính chi tiết cho các cấp tín hiệu đã được thể hiện ở thử nghiệm 1 (hình 2). Có hai lưu ý ở hình 3: thứ nhất, hệ trục tọa độ ở đây là theo thứ tự hàng (36 hàng từ trên xuống dưới) và cột (91 cột từ trái qua phải) của ô lưới; và thứ hai, giá trị ở đây là dị thường độ cao sau khi đã khử thành phần bước sóng dài, nên sẽ nhỏ so với giá trị đầy đủ. Tuy nhiên, điều này không ảnh hưởng đến việc so sánh sự khác biệt giữa giá trị tính toán nội suy và giá trị tham khảo vì cả hai đều cùng bị khử thành phần bước sóng dài đến độ và bậc 32.



Hình 3: trên xuống dưới: giá trị tham khảo và giá trị nội suy (có áp dụng chính quy hóa quasi-optimality). Hệ trục tọa độ theo thứ tự hàng cột của lưới

So sánh giá trị tham khảo (hình 3, trên) và giá trị nội suy (hình 3, dưới) một cách trực quan ta thấy rất giống nhau cả về giá trị (màu sắc) và kiểu mẫu. Sự khác biệt duy nhất có thể thấy được bằng mắt thường là ở khu vực nhỏ xíu chính giữa sát dưới cùng của mỗi hình. Còn về con số thì độ lệch quân phương (RMS) tại 3276 điểm là 5 cm, đúng bằng mức độ của nhiễu giả ngẫu nhiên đã thêm vào số liệu ban đầu trước đó; hay nói cách khác, sai số cuối cùng ở cùng mức độ với sai số dữ liệu, nghĩa là quy trình tính toán nội suy là chính xác.

Xin nói thêm về một vấn đề tính toán xuất hiện ở thử nghiệm này, đó là hệ phương trình chuẩn (khi giải hệ số tỷ lệ)

$$(K_{rep}{}^{T} K_{rep})\mathrm{d} - K_{rep}{}^{T} f = 0 \qquad (18)$$

bị rơi vào tình trạng giả định yếu (ill-conditioned) mà để giải quyết thì một giải pháp chính quy hóa (regularization) thích hợp đã được áp dụng gọi là quasi-optimality [8]. Vấn đề chính quy hóa không được trình bày ở đây vì vượt ngoài phạm vi của bài báo này.

4. Kết luận

Với hai thử nghiệm được thiết kế cho hai bối cảnh từ đơn giản đến phức tạp, từ toàn cầu đến khu vực, kết quả cho thấy quy trình tính toán dựa trên cách tiếp cận wavelets được giới thiệu ở bài báo này là khả thi và chính xác, có thể ứng dụng trong việc tính toán nội suy giá trị dị thường độ cao nói riêng và các đại lượng trắc địa nói chung với ưu điểm nổi bật là bảo toàn được tính chất điều hòa cầu của các đại lượng nội suy. Kết quả từ thử nghiệm cho thấy sai số của việc tính toán chỉ ở mức 10^{-12} m, hoàn toàn có thể bỏ qua trong mọi ngữ cảnh trắc địa. Kể cả khi đã thêm nhiễu giả ngẫu nhiên 5 cm vào dữ liệu ban đầu thì kết quả nội suy vẫn đạt độ chính xác RMS = 5 cm (tính cho 3276 điểm), cùng độ lớn của nhiễu.

Nhìn chung, các công thức tính toán wavelets có vẻ khá phức tạp so với các phương pháp nội suy quen thuộc khác. Tuy nhiên, ưu điểm quan trọng của phương pháp này là việc bảo toàn tính chất điều hòa cầu cho các giá trị nội suy (nhờ vào việc sử dung các hàm cầu và đa thức Legendre), điều mà các phương pháp nội suy thuần toán học khác không làm được. Ngoài ra, nếu tích hợp được cả bài toán chuyển đổi (giữa các đại lượng khác nhau) vào nhân tái tạo thì phương pháp này còn có thể áp dụng vào vấn đề xây dựng mô hình geoid [9].❍

Tài liệu tham khảo

[1]. Keller W (Ed) (2004) Wavelets in Geodesy and Geodynamics. Walter de Gruyter, Berlin

[2]. Eicker A (2008) Gravity field refinement by radial basis functions from in-situ satellite data. Dissertation, Bonn University

[3]. Freeden W, Gervens T, Schreiner M (1998) Constructive approximation on the sphere (with applications to geomathematics). Clarendon Press, Oxford

[4]. Schmidt M, Fengler M, Mayer-Guerr T, Eicker A, Kusche J, Sanchez L, Han SC (2007) Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. J Geodesy 81: 17-38

[5]. Moritz H (1989) Advanced physical geodesy (2. ed.). Wichmann, Karlsruhe

[6]. Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2008) An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly 2008. Vienna, Austria, April 13-18, 2008

[7]. Lương Bảo Bình (2016) Tính toán dị thường độ cao từ hệ số điều hòa ở độ và bậc nhất định trong dải sóng dài, Tạp chí Phát triển khoa học & công nghệ, Tập 19, K4 - 2016, 11 – 18

[8]. Tikhonov AN, Arsenin VY (1977) Solutions of ill-posed problems. Wiley, Newyork

[9]. Luong BB (2011) Combined gravity field modeling from satellite gravity and terrestrial data sources applying multi-resolution analysis. Dissertation, Graz University of Technology.❍

Summary

Apply wavelets to interpolate height anomalies

Luong Bao Binh

Ho Chi Minh City University of Technology

This paper introduces the wavelets approach applied to the interpolation of height anomalies. It can be used to compute interpolated values for arbitrary positions from input values with the arbitrary (spatial) distribution. Following the theoretical fundamental, two simulations using model EGM 2008 for a global grid and local irregular positions are presented to illustrate and authenticate the correct work of this method.❍

Keywords: wavelets, reproducing kernel, spherical harmonics, interpolation