

MỘT PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH MÔ HÌNH GEOID THEO CÁC SỐ LIỆU GPS VÀ THỦY CHUẨN

PGS. TS. ĐẶNG NAM CHINH
KS. VŨ ĐÌNH TOÀN

Trường Đại học Mở - Địa chất

ThS. NGUYỄN DUY ĐỒ

Trường ĐH Tài nguyên Môi trường Hà Nội

Tóm tắt:

Làm khớp mô hình Geoid với các số liệu GPS thủy chuẩn có thể cải thiện chất lượng mô hình Geoid đã có. Trong bài báo này giới thiệu một phương pháp làm khớp cục bộ mô hình Geoid với số liệu GPS-thủy chuẩn dựa trên các số hiệu chỉnh xác định theo mô hình tương đối của các trị đo.

1. Đặt vấn đề

Khi xử lý các mạng lưới GPS chúng ta có thể dễ dàng khai thác các mô hình Geoid toàn cầu như OSU91A, EGM-96, EGM2008 để xác định độ cao Geoid (N) phục vụ khâu tính chuyển độ cao trắc địa (H) về độ cao thủy chuẩn (h) cho các điểm lưới [1]. Nếu trong lưới GPS có một số điểm được xác định độ cao bằng thủy chuẩn hình học với độ chính xác cần thiết, chúng ta sẽ có cơ sở để đánh giá mức độ phù hợp giữa mô hình Geoid đã sử dụng với bề mặt Geoid thực trên khu đo. Qua xử lý một số mạng lưới GPS có các điểm song trùng, cho thấy các mô hình Geoid toàn cầu thường sai khác với mặt Geoid thực đáng kể, do đó nếu chỉ sử dụng mô hình Geoid toàn cầu sẽ hạn chế về độ chính xác.

Vấn đề cần quan tâm giải quyết ở đây là chúng ta không chỉ sử dụng các điểm song trùng để đánh giá độ chính xác đo cao GPS hay bổ sung thêm số hiệu chỉnh (nội suy) nhằm nâng cao độ chính xác đo cao GPS trong mạng lưới hiện thời mà còn sử dụng chúng để hiệu chỉnh nhằm nâng cấp mô hình Geoid toàn cầu tại chính khu vực có mạng lưới GPS. Cách làm này rất có ý nghĩa về phương diện kinh tế và kỹ thuật vì đã tận dụng tối đa thông tin từ các trị đo để làm

chính xác mô hình Geoid đã có. Mô hình Geoid đã được chính xác hoá chắc chắn sẽ phục vụ tốt hơn cho công tác đo cao trên khu vực này trong thời gian tiếp theo.

2. Cơ sở lý thuyết

Nếu các điểm của mạng lưới GPS có độ cao được xác định bằng thủy chuẩn hình học (gọi là các điểm song trùng), chúng ta sẽ có cơ sở để xác định độ cao Geoid tại các điểm lưới GPS theo công thức:

$$N_i = H_i - h_i \quad (1)$$

trong đó H_i là độ cao trắc địa, h_i là độ cao thủy chuẩn, N_i là độ cao Geoid.

Độ cao Geoid xác định theo (1) được gọi là độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn. Đặc điểm của độ cao Geoid xác định theo (1) là có giá trị phụ thuộc vào khâu xử lý lưới GPS và lưới thủy chuẩn, chủ yếu là phụ thuộc vào số liệu gốc (khởi tính) trong các mạng lưới đó. Nếu như mạng lưới GPS có mật độ điểm phù hợp, từ các giá trị độ cao Geoid xác định theo (1) chúng ta có thể xây dựng được mô hình Geoid cục bộ trên phạm vi bao trùm của lưới GPS [3]. Mô hình Geoid này được xây dựng trên Ellipsoid đã sử dụng trong tính toán lưới GPS.

Từ mô hình Geoid toàn cầu, chúng ta lại có thể nhận được độ cao Geoid tại các điểm của lưới GPS, độ cao Geoid này ký hiệu là N_i^M . Chắc chắn rằng, độ cao Geoid N_i tính theo (1) và độ cao Geoid N_i^M lấy từ mô hình Geoid toàn cầu sẽ khác nhau, kể cả trong trường hợp sử dụng hệ WGS-84 để tính toán lưới GPS.

Nếu như lưới GPS được đo và lưới thủy chuẩn được đo đạc với độ chính xác cao thì giá trị N_i tính theo (1) có độ chính xác cao hơn giá trị N_i^M lấy từ mô hình Geoid toàn cầu. Từ những số liệu này, chúng ta có thể tính toán để xác định số hiệu chỉnh vào độ cao Geoid toàn cầu tại đúng các điểm song trùng trong lưới GPS nhằm cải thiện độ chính xác mô hình Geoid toàn cầu trên khu vực đo lưới [5], [6]. Trên thực tế, ta không cần sử dụng toàn bộ mô hình Geoid toàn cầu mà cần trích ra từ mô hình toàn cầu một mô hình Geoid riêng cho nước ta. Khi tính toán hiệu chỉnh để chính xác hoá chỉ thực hiện đối với phần mô hình Geoid riêng này.

Việc xác định số hiệu chỉnh vào mô hình Geoid toàn cầu dựa vào số liệu đo GPS-thủy chuẩn được gọi là phương pháp **làm khớp (Matching)** mô hình Geoid, phương pháp làm khớp có thể áp dụng đối với cả Geoid xác định theo số liệu trọng lực [4]. Để làm khớp mô hình Geoid, có thể thực hiện theo hai phương pháp sau:

1) Hiệu chỉnh dựa trên hiệu độ cao thủy chuẩn và hiệu độ cao trắc địa tại các điểm song trùng (phương pháp tương đối).

2) Hiệu chỉnh dựa trên độ cao thủy chuẩn và độ cao trắc địa tại các điểm song trùng (phương pháp tuyệt đối)

Để giảm tối đa ảnh hưởng hệ thống của cơ sở số liệu gốc (*Datum*), lưới GPS cần được xử lý trong hệ WGS-84 hoặc ITRF.

Sau đây chúng ta xem xét quy trình tính toán hiệu chỉnh mô hình Geoid theo phương pháp tương đối.

2.1. Thuật toán xác định số hiệu chỉnh cho mô hình Geoid theo các giá trị hiệu số

Để không phải xét đến giá trị khởi tính độ cao trắc địa H và độ cao thủy chuẩn h khi hiệu chỉnh mô hình Geoid, nguyên tắc tính toán hiệu chỉnh mô hình Geoid chỉ dựa vào "các giá trị hiệu số" giữa các cặp điểm i, j . Có 3 loại hiệu số được thiết lập bao gồm:

- 1) Hiệu số độ cao thủy chuẩn $\Delta h_{i,j}$
- 2) Hiệu số độ cao trắc địa $\Delta H_{i,j}$
- 3) Hiệu số độ cao Geoid lấy từ mô hình Geoid $\Delta N_{i,j}^M$, với

$$\Delta N_{i,j}^M = N_j^M - N_i^M \quad (2)$$

Từ phương trình (1), ta xác định được hiệu số độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn cho 2 điểm i, j như sau:

$$\Delta N_{i,j} = \Delta H_{i,j} - \Delta h_{i,j} \quad (3)$$

Ta lập phương trình trị bình sai:

$$\Delta N_{i,j} + V_{i,j} = (N_j^M + dN_j) - (N_i^M + dN_i) \quad (4)$$

trong đó: dN_i, dN_j là các số hiệu chỉnh cho độ cao Geoid tại điểm i và điểm j (gọi là số hiệu chỉnh cho mô hình Geoid), đóng vai trò là các ẩn số trong bài toán này.

Trong phương trình (4) độ cao Geoid N_i^M, N_j^M xác định từ mô hình Geoid đóng vai trò như trị gần đúng của các ẩn số.

Từ (4) ta có phương trình số hiệu chỉnh:

$$V_{i,j} = dN_j - dN_i + l_{i,j} \quad (5)$$

trong đó:

$$l_{i,j} = N_j^M - N_i^M - \Delta N_{i,j} = \Delta N_{i,j}^M - \Delta N_{i,j} \quad (6)$$

Tập hợp các phương trình số hiệu chỉnh (5) sẽ được giải theo điều kiện $V^T P V = \min$, từ đó ta có hệ phương trình chuẩn:

$$A^T M_{\Delta N}^{-1} A X + A^T M_{\Delta N}^{-1} L = 0 \quad (7)$$

trong đó: A là ma trận hệ số phương trình số hiệu chỉnh, gồm các hệ số của phương trình (5), $M_{\Delta N}^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận

hiệp phương sai hiệu độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn, X là véc tơ ẩn số, gồm các số hiệu chỉnh dN cho mô hình Geoid, L là véc tơ số hạng tự do, có các phần tử được xác định theo (6)

Do không coi độ cao Geoid của bất kỳ điểm nào là gốc, do đó ma trận hệ số phương trình chuẩn (7) là ma trận suy biến có số khuyết $d=1$. Để giải nghiệm của hệ phương trình chuẩn, chúng ta áp dụng phương pháp bình sai lưới tự do.

$$X = -(A^T M_{\Delta N}^{-1} A)^{-1} A^T M_{\Delta N}^{-1} L \quad (8)$$

trong đó $(A^T M_{\Delta N}^{-1} A)^{-1}$ là ma trận giả nghịch đảo của ma trận hệ số phương trình chuẩn.

Có một số phương pháp tìm ma trận giả nghịch đảo như phương pháp Moore – Penrose, phương pháp Helmert - Wolf, hoặc phương pháp thêm điều kiện phụ [2].

2.2. Vấn đề xác định ma trận hiệp phương sai $M_{\Delta N}$

Để lập hệ phương trình chuẩn (7) cần xác định ma trận hiệp phương sai của hiệu độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn $M_{\Delta N}$. Ma trận hiệp phương sai $M_{\Delta N}$ được xác định dựa trên quan hệ (3) tức là phụ thuộc vào đặc tính sai số của hiệu độ cao thủy chuẩn $\Delta h_{i,j}$ và của hiệu độ cao trắc địa $\Delta H_{i,j}$.

Giá trị hiệu số độ cao thủy chuẩn $\Delta h_{i,j}$ có thể sử dụng trực tiếp trị đo chênh cao hình học giữa hai mốc i, j và cũng có thể sử dụng hiệu số độ cao giữa hai mốc i, j trong lưới thủy chuẩn đã được bình sai. Tương tự, giá trị hiệu số độ cao trắc địa $\Delta H_{i,j}$ cũng có thể sử dụng trực tiếp hiệu độ cao trắc địa đo được bằng GPS, cho trong lời giải cạnh (baseline) và cũng có thể sử dụng hiệu độ cao trắc địa tính từ độ cao trắc địa đã bình sai lưới GPS.

2.2.1. Trường hợp sử dụng các trị đo trực tiếp chưa bình sai

Xét trường hợp sử dụng trực tiếp hiệu độ cao thủy chuẩn và hiệu độ cao trắc địa giữa

2 điểm i, j . Trong trường hợp này ma trận $M_{\Delta N}$ có dạng ma trận đường chéo:

$$M_{\Delta N} = \begin{bmatrix} m_{\Delta N(1)}^2 & & & \\ & m_{\Delta N(2)}^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & m_{\Delta N(n)}^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

trong đó các phần tử trên đường chéo là sai số trung phương của hiệu độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn của n tuyến đo trực tiếp, được tính theo công thức quen thuộc:

$$m_{\Delta N(i)}^2 = m_{\Delta H(i)}^2 + m_{\Delta h(i)}^2 \quad (10)$$

với $m_{\Delta H(i)}$ là sai số trung phương chênh cao trắc địa xác định bằng GPS và $m_{\Delta h(i)}$ là sai số trung phương hiệu độ cao xác định bằng thủy chuẩn hình học.

Trong trường hợp này việc xác định ma trận $M_{\Delta N}$, ma trận $M_{\Delta N}$ là ma trận đường chéo.

2.2.2. Trường hợp sử dụng các hiệu độ cao tính từ độ cao sau bình sai lưới.

Sử dụng các hiệu độ cao trắc địa đo được bằng GPS để bình sai lưới (theo phương pháp gián tiếp) sẽ nhận được ma trận hiệp phương sai của các ẩn số ký hiệu là M_H . Từ đó ta có ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao trắc địa sau bình sai:

$$M_{\Delta H} = A.M_H.A^T \quad (11)$$

trong đó A là ma trận hệ số (gồm các số 1, -1 và 0), thể hiện cho mối liên hệ tối thiểu các điểm của lưới GPS.

Lưới độ cao hình học cũng được bình sai theo phương pháp gián tiếp, sau bình sai nhận được ma trận hiệp phương sai của các ẩn số (độ cao thủy chuẩn), ký hiệu là M_h , từ đó sẽ tính được ma trận hiệp phương sai của các hiệu độ cao thủy chuẩn sau bình sai:

$$M_{\Delta h} = A.M_h.A^T \quad (12)$$

trong đó A cũng chính là ma trận A trong (11).

Khi đã tính được 2 ma trận hiệp phương sai $M_{\Delta H}$ và $M_{\Delta h}$ sẽ dễ dàng tính được ma trận hiệp phương sai của hiệu độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn theo công thức:

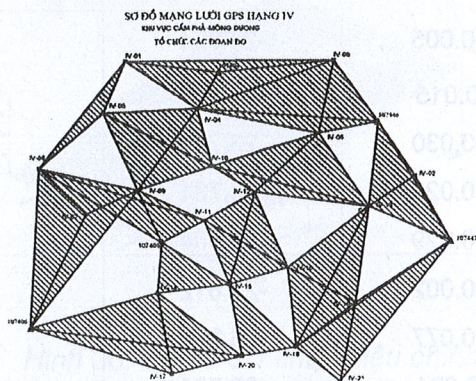
$$M_{\Delta N} = M_{\Delta H} + M_{\Delta h} \quad (13)$$

3. Tính toán thực nghiệm

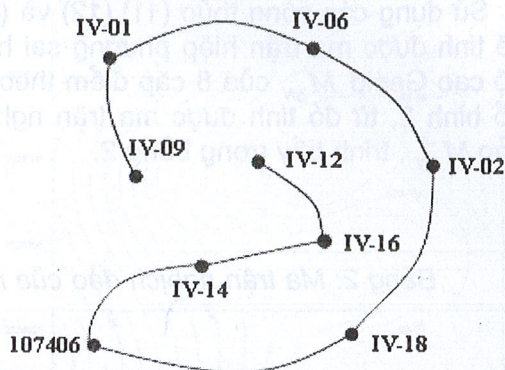
Số liệu thực nghiệm là mạng lưới GPS hạng IV được đo tại vùng mỏ Cẩm Phả - Mông Dương (CP-MD) tỉnh Quảng Ninh. Lưới gồm 26 điểm với 74 cạnh đo (base-lines), trong đó có 9 điểm song trùng (được đo nối thủy chuẩn hình học với độ chính xác hạng III nhà nước), (hình 1).

Với 74 giá trị chênh cao trắc địa, tiến hành bình sai lưới độ cao trắc địa để xác định độ cao trắc địa của các mốc và ma trận hiệp phương sai của chúng, từ đó theo công thức (11) sẽ xác định ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao trắc địa $M_{\Delta H}$ của 8 cặp điểm (liên kết 9 điểm song trùng). Sơ đồ liên kết 9 điểm song trùng bởi 8 cặp điểm thể hiện trên hình 2, theo sơ đồ này sẽ xác định được ma trận A trong (11) và (12).

Với số liệu đo của lưới độ cao hình học hạng III, tiến hành bình sai lưới để xác định độ cao thủy chuẩn các mốc cùng ma trận hiệp phương sai của chúng, từ đó theo công thức (12) xác định được ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao thủy chuẩn $M_{\Delta h}$ của 8 cặp điểm nêu trên,



Hình 1: Sơ đồ mạng lưới GPS CP-MD



Hình 2: Quan hệ liên kết các điểm song trùng

Từ hai ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao trắc địa $M_{\Delta H}$ và hiệu độ cao thủy chuẩn $M_{\Delta h}$ sẽ tính được ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn $M_{\Delta N}$, tiếp theo sẽ tính được ma trận nghịch đảo $M_{\Delta N}^{-1}$ để phục vụ cho khâu thành lập hệ phương trình chuẩn theo công thức (7).

Với số liệu thực tế của mạng lưới trên và mô hình Geoid EGM-2008, theo các công thức (2), (3) và (6), tính được chênh cao trắc địa ΔH , chênh cao thủy chuẩn Δh , hiệu độ cao Geoid ΔN^m , từ đó tính được số hạng tự do của các phương trình số hiệu chỉnh, kết quả tính trong bảng 1.

Bảng 1: Các giá trị tính ΔH , Δh , ΔN^m và số hạng tự do l

Tên chênh cao	ΔH (m)	Δh (m)	ΔN^m (m)	$l = \Delta h + \Delta N^m - \Delta H$
IV-01 → IV-06	-6.824	-6.921	0.077	-0.020
IV-06 → IV-02	-1.002	-1.040	0.083	0.045
IV-02 → IV-18	-18.693	-18.711	0.008	-0.010
IV-18 → 107406	-0.956	-0.783	-0.164	0.009
107406 → IV-14	45.607	45.515	0.065	-0.027
IV-14 → IV-16	55.118	55.130	0.063	0.075
IV-16 → IV-12	38.556	38.453	-0.045	-0.148
IV-09 → IV-01	-72.830	-72.715	-0.029	0.086

Sử dụng các công thức (11),(12) và (13) sẽ tính được ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao Geoid $M_{\Delta N}$ của 8 cặp điểm theo sơ đồ hình 2, từ đó tính được ma trận nghịch đảo $M_{\Delta N}^{-1}$, trình bày trong bảng 2.

Sau khi lập và giải hệ phương trình chuẩn (7), sẽ xác định được giá trị các ẩn số, chính là các số hiệu chỉnh cho độ cao Geoid (dN) tại các điểm song trùng. Từ đó sẽ nhận được độ cao Geoid sau hiệu chỉnh (bảng 3).

Bảng 2: Ma trận nghịch đảo của ma trận hiệp phương sai hiệu độ cao geoid $M_{\Delta N}^{-1}$

IV-01 → IV-06	IV-06 → IV-02	IV-02 → IV-18	IV-18 → 107406	107406 → IV-14	IV-14 → IV-16	IV-16 → IV-12	IV-09 → IV-01
18328.11	12571.59	11392.45	11449.81	9815.89	8730.72	7233.52	11586.20
12571.59	18678.86	14611.43	14186.73	12497.95	11385.02	9568.16	9568.88
11392.45	14611.43	21264.50	17491.33	15799.17	14647.03	11331.06	9041.81
11449.81	14186.73	17491.33	33742.13	30536.23	24776.13	12519.83	9160.97
9815.89	12497.95	15799.17	30536.23	35281.55	24763.31	12367.48	7858.08
8730.72	11385.02	14647.03	24776.13	24763.31	26983.75	13177.89	6920.02
7233.52	9568.16	11331.06	12519.83	12367.48	13177.89	20820.71	5670.17
11586.20	9568.88	9041.81	9160.97	7858.08	6920.02	5670.17	14676.66

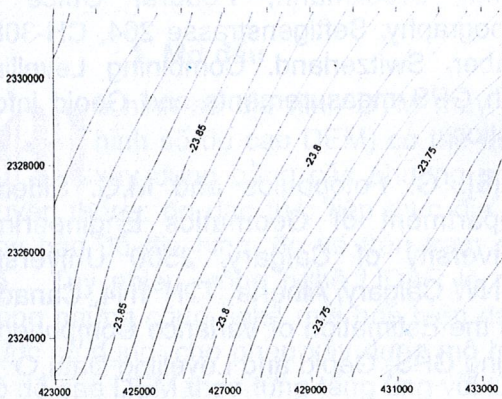
Bảng 3: Số hiệu chỉnh và độ cao geoid sau hiệu chỉnh

Tên điểm	Độ cao geoid lấy từ mô hình toàn cầu (m)	Số hiệu chỉnh dN (m)	Độ cao geoid sau hiệu chỉnh (m)
IV-01	-23.879	-0.005	-23.884
IV-06	-23.802	0.015	-23.787
IV-02	-23.719	-0.030	-23.749
IV-18	-23.711	-0.020	-23.731
107406	-23.875	-0.029	-23.904
IV-14	-23.810	-0.002	-23.812
IV-16	-23.747	-0.077	-23.824
IV-12	-23.792	0.071	-23.721
IV-09	-23.850	0.081	-23.769

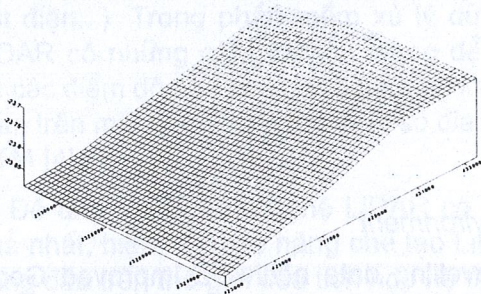
Sau khi xác định được các ẩn số sẽ tính được véc tơ số hiệu chỉnh V theo công thức (5). Trong trường hợp sử dụng các hiệu độ cao đã bình sai, các số hiệu chỉnh V_{ij} có giá trị bằng 0.

Sau khi tính được độ cao Geoid sau hiệu chỉnh tại các điểm song trùng có thể vẽ lại mô hình Geoid cho khu vực Cẩm Phả-Mông Dương. Để có thể nhìn trực quan sự thay đổi của bề mặt Geoid sau khi hiệu chỉnh, ở đây vẽ cả phần mô hình Geoid khi chưa hiệu chỉnh.

Trên hình 3a và 3b là các sơ đồ 2D và sơ đồ 3D của phần mô hình Geoid EGM-2008 thuộc vùng Cẩm Phả-Mông Dương khi chưa hiệu chỉnh.

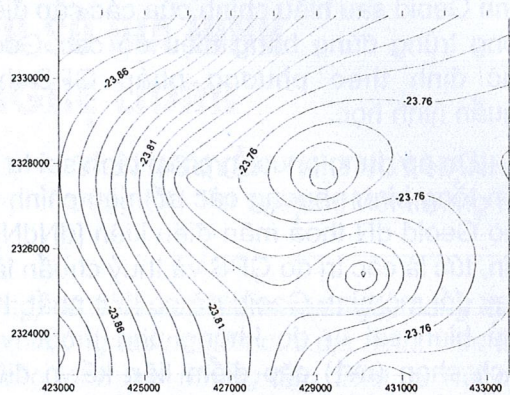


Hình 3a: Sơ đồ 2D chưa hiệu chỉnh

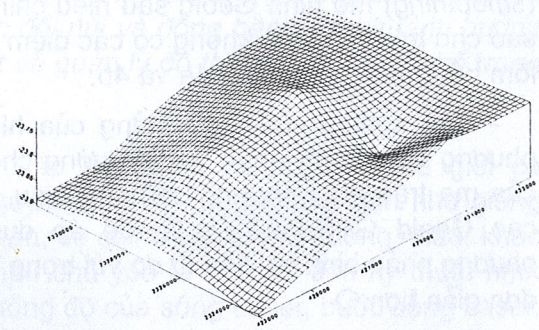


Hình 3b: Sơ đồ 3D chưa hiệu chỉnh

Trên hình 4a và 4b là sơ đồ 2D và 3D của phần mô hình Geoid đã được hiệu chỉnh.



Hình 4a: Sơ đồ 2D đã hiệu chỉnh



Hình 4b: Sơ đồ 3D đã hiệu chỉnh

Có thể nhận thấy rằng, sau khi xử lý số liệu, độ cao Geoid tại các điểm song trùng nhận được số hiệu chỉnh, do đó bề mặt Geoid bị thay đổi khớp với số liệu đo GPS và thuỷ chuẩn. Tuy nhiên chỉ tại điểm song trùng mô hình được thay đổi “đột biến”, còn các điểm khác không thay đổi.

Sau khi nghiên cứu lý thuyết và tiến hành tính toán thực nghiệm trên số liệu thực tế, chúng tôi đưa ra một số kết luận và kiến nghị như sau:

4. Kết luận và kiến nghị

- Quy trình tính toán xử lý kết hợp số liệu GPS, thuỷ chuẩn hình học để hiệu chỉnh độ cao Geoid xác định theo mô hình Geoid là hoàn toàn chặt chẽ. Số liệu sử dụng để tính toán đều là các hiệu độ cao (hiệu độ cao trắc địa, hiệu độ cao thuỷ chuẩn và hiệu độ cao Geoid lấy từ mô hình). Hiệu độ cao mô

hình Geoid sau hiệu chỉnh của các cặp điểm song trùng đúng bằng hiệu độ cao Geoid xác định theo phương pháp GPS-thủy chuẩn hình học.

- Do áp dụng phương pháp bình sai tự do nên tổng bình phương các số hiệu chỉnh độ cao Geoid dN thỏa mãn điều kiện $[dNdN] = \min$, tức là các trị đo GPS và thủy chuẩn làm thay đổi mô hình Geoid đã có là ít nhất. Kết quả bình sai tự do không phụ thuộc vào cách chọn $(n-1)$ cặp điểm liên kết n điểm song trùng khi lập ma trận A, với $n \geq 2$

- Cần áp dụng phương pháp làm trơn (*smoothing*) mô hình Geoid sau hiệu chỉnh, sao cho trên mô hình không có các điểm lỗi lớn bất thường như hình 4a và 4b.

- Cần nghiên cứu ảnh hưởng của hiệp phương sai (thành phần ngoài đường chéo của ma trận hiệp phương sai) của hiệu độ cao Geoid GPS-thủy chuẩn để áp dụng phương pháp bình sai lưới tự do với trọng số đơn giản hơn. ○

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đặng Nam Chinh. *Nội suy dị thường độ cao và độ chính xác xác định độ cao bằng công nghệ GPS*. Đặc san Khoa học và

Công nghệ Địa chính. Tháng 12/1997.

[2]. Hoàng Ngọc Hà, Trương Quang Hiếu. *Cơ sở toán học xử lý số liệu trắc địa*. Nhà xuất bản Giao thông Vận tải, Hà Nội-2003.

[3]. Đặng Hùng Võ, Lê Minh, Phạm Hoàng Lân, Nguyễn Tuấn Anh. *Xây dựng mô hình Geoid độ chính xác cao ở Việt Nam (GeoVN-2003)*. Tuyển tập báo cáo Hội nghị khoa học trắc địa bản đồ và quản lý đất đai lần thứ nhất-Hà Nội, 12/2004.

[4]. Adam Lyszkwic. *Quasigeoid for the area of Poland computed by least squares collocation*. Technical Sciences. No 13.-2010.

[5]. Urs Marti, Andreas Schlatter and Elmar Brockmann, Federal Office of Topography, Seftigenstrasse 264, CH-3084 Waber, Switzerland. *Combining Levelling with GPS measurements and Geoid information*.

[6]. G. Fotopoulos and M.G. Sideris, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, 2500 University Dr. NW Calgary, Alberta, T2N 1N4, Canada. *On the Estimation of Variance Components Using GPS, Geoid and Levelling Data*. ○

Summary

A METHOD FOR CORRECTION OF THE GEOID MODEL BY GPS-LEVELLING DATA

Ass. Prof. Dr. Dang Nam Chinh

Eng. Vu Dinh Toan

Hanoi University of Mining and Geology

MSc. Nguyen Duy Do

Hanoi University of Natural Resources and Environment

Fitting surface of geoid model to GPS and levelling data achieve a improved Geoid model. This paper presents a method for locally fitting Geoid model to GPS/Levelling data based on the corrections determined from relative model of measurements. ○