ÁP DỤNG CHÍNH QUY HÓA ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN TRONG BÀI TOÁN THẾ TRỌNG TRƯỜNG TRÁI ĐẤT

LƯƠNG BẢO BÌNH
Trường Đại học Bách Khoa - ĐHQG TPHCM

Tóm tắt:

Chính quy hóa, một cách để ổn định nghiệm của hệ phương trình chuẩn, là một vấn đề quan trọng khi giải quyết các hệ thống giả định yếu vốn thường xảy ra trong tính toán trắc địa. Trong bài báo này, một số giải pháp chính quy hóa như GBE, L-curve, Quasi-solution, Discrepancy Principle, GCV, và Quasi-optimality sẽ được giới thiệu và khảo sát trong bối cảnh bài toán xử lý dữ liệu thế trọng trường trái đất. Kết quả thử nghiệm cho thấy hiệu quả của chính quy hóa, khi giảm thiểu sai số đầu ra từ 1.55 m (trường hợp không áp dụng chính quy hóa) xuống còn 0.05 m, tương đương với mức sai số đầu vào.

Từ khóa: chính quy hóa (regularization), giả định yếu (ill-conditioned), thế trọng trường trái đất.

1. Đặt vấn đề

Trong tính toán trắc địa, chúng ta thường xuyên cần giải hệ phương trình

$$AX = L \tag{1}$$

theo nguyên tắc số bình phương nhỏ nhất, tức cực tiểu hóa

$$J(X) = \|AX-L\|^2 \tag{2}$$

Khi đó, nghiệm X được ước tính từ hệ phương trình chuẩn

$$A^TAX = A^TL \tag{3}$$

theo công thức (4):

$$X = (A^TA)^{-1}\,A^TL \tag{4}$$

Tuy nhiên, nếu mô hình (3) bị thiếu hạng (rank-deficient) thì sẽ dẫn đến tình trạng giả định yếu (ill-conditioned), tức một biến đổi nhỏ hoặc sai số trong trị đo L sẽ gây ra khác biệt rất lớn ở lời giải X nhận được; hay nói cách khác, lời giải thiếu ổn định và không tin cậy vì quá nhạy cảm với sai số (dù sai số ở mức chấp nhận được) của dữ liệu đầu vào. Trong trường hợp này, một giải pháp chính quy hóa (regularization) cần được áp dụng để cải thiện điều kiện của hệ phương trình chuẩn. Việc này có thể đạt được bằng cách thêm vào một hình thức thông tin bổ sung, chẳng hạn như độ trơn tru hay ràng buộc về chuẩn (norm) của L hoặc X. Khi đó, phương trình (2) và (4) trở thành (5) và (6), một cách tương ứng:

$$J(X) = \|AX-L\|^2 + \alpha\|X\|^2 \tag{5}$$

$$X = (A^TA+M)^{-1}\,A^TL \tag{6}$$

với α là tham số chính quy hóa và M là ma trận tham số.

Dưới dạng phổ [1], lời giải không áp dụng và có áp dụng chính quy hóa được thể hiện theo (7):

Ngày nhận bài: 3/11/2023, ngày chuyển phản biện: 5/11/2023, ngày chấp nhận phản biện: 9/11/2023, ngày chấp nhận đăng: 18/11/2023

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{<L, u_n>}{\sigma_n} v_n; \; X_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} < L, u_n > \quad (7)$$

với σ_n là giá trị đơn (singular value) của ma trận A, v_n và u_n lần lượt là vector riêng (eigenvector) của A^TA và AA^T.

Cho một giá trị n cụ thể, lời giải chính quy hóa được viết lại như sau:

$$X_{\alpha,n} = \delta_n X_n + \delta_n \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n}; \; \delta_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha} \quad (8)$$

với δ_n là bộ lọc ổn định hóa hệ thống, X_n là lời giải chính xác từ dữ liệu đầu vào chính xác, và ε_n đại diện cho sai số dữ liệu.

Theo công thức (8), một mặt, để lời giải chính quy hóa $X_{n,\alpha}$ gần với lời giải chính xác X_n nhất thì cần $\delta_n \rightarrow 1$, tức α nên nhỏ nhất có thể; mặt khác, α lại nên lớn nhất có thể ($\delta_n \rightarrow 0$) để giảm thiểu ảnh hưởng từ sai số dữ liệu. Do đó, việc chọn được tham số tối ưu là vấn đề cốt lõi trong giải pháp chính quy hóa để tìm ra được lời giải cân bằng và có ý nghĩa.

Dạng bài toán dữ liệu lớn trong trắc địa thường gặp là các bài toán xử lý dữ liệu thế trọng trường trái đất trên diện rộng, chẳng hạn như bài toán xây dựng Geoid quốc gia, vốn đang là vấn đề hiện tại ở Việt Nam. Khi đó, việc phải áp dụng một giải pháp chính quy hóa phù hợp là cần thiết, chẳng hạn [2]. Một ví dụ cụ thể hơn là bài toán áp dụng trong bài báo [3], vốn sẽ được dùng làm bối cảnh khảo sát ở các thử nghiệm được trình bày ở mục 3 bên dưới.

Phần tiếp theo của bài viết sẽ giới thiệu một số giải pháp chính quy hóa cơ bản cũng như thiết kế thử nghiệm để khảo sát hiệu quả của chúng và đưa ra khuyến nghị lựa chọn giải pháp chính quy hóa phù hợp dựa trên sự hài hòa giữa hiệu quả hoạt động và tính đơn giản khi tính toán.

2. Giải pháp chính quy hóa một tham số

Về nguyên tắc, việc phân loại các phương pháp chính quy hóa thường dựa trên bậc và số lượng tham số. Nhìn chung, tham số bậc không (hằng số) thường được sử dụng do tính đơn giản của nó. Phân loại theo số lượng tham số, chúng ta có thể chia thành chính quy hóa nhiều tham số hoặc một tham số.

Một đại diện của chính quy hóa nhiều tham số là phương pháp GBE (Generalized Biased Estimation). Theo cách này, M là một ma trận chéo chứa các tham số theo số lượng ẩn số trong phương trình chuẩn. Hàm cực tiểu J khi đó sẽ có dạng

$$J(X) = \|AX-L\|^2 + V\|X\|^2 \quad (9)$$

với V là vector thỏa $V^TV = M$.

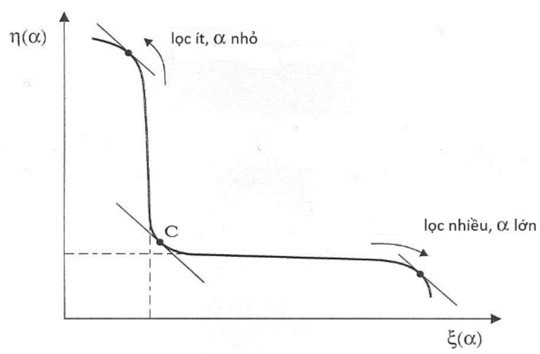
Trên lý thuyết, chính quy hóa nhiều tham số sẽ linh hoạt và xứng hợp hơn đối với dữ liệu không đồng nhất và phức tạp do có thể lựa chọn loại bỏ sự chính quy hóa không cần thiết đối với một số ẩn số và do đó giảm sai số chính quy hóa. Tuy nhiên, việc có quá nhiều tham số (tương đương với số ẩn) sẽ dẫn đến sự phức tạp quá mức cần thiết của hệ thống. Để giảm số lượng tham số, Xu et al. (2006) đã giới thiệu phương pháp chọn một tham số chính quy hóa theo một nhóm ẩn số dẫn đến giảm thiểu tổng số tham số (xem [4] để biết thêm chi tiết).

Trong thực tế, chính quy hóa một tham số là đủ cho các bài toán trắc địa mà cụ thể là bài toán xác định Geoid và các đại lượng thế trọng trường trái đất liên quan [5]. Do đó, phần tiếp theo được dành cho giải pháp chính quy hóa một tham số, hay còn gọi là chính quy hóa Tikhonov [6], trong đó điều quan trọng nhất là cách chọn tham số α tối ưu.

Phần tiếp theo bên dưới sẽ giới thiệu một số giải pháp (chọn tham số tối ưu) trong chính quy hóa một tham số. Các công thức tính toán được tham khảo từ hai tài liệu chính là [6] và [1].

2.1. Giải pháp L-curve

Về nguyên tắc, việc xác định tham số tối ưu (hay mức độ chính quy hóa tối ưu) là một nỗ lực để cân bằng sai số dữ liệu với sai số chính quy hóa cho mục tiêu là đạt được lời giải tốt nhất với sai số chính quy hóa nhỏ nhất. Đồ thị L-curve, được vẽ theo tỉ lệ logarit ở hình 1, thể hiện chuẩn (norm) ξ của vector lời giải chính quy hóa so với chuẩn η của vector phần dư tương ứng cho những giá trị tham số chính quy hóa α khả dĩ, là một minh họa trực quan cho quá trình này. Nhánh đứng (bên trái) của hình chữ L thể hiện khu vực bộ lọc hoạt động thấp, tương ứng với tham số chính quy hóa nhỏ, giữ cho chuẩn của lời giải nhỏ nhưng chuẩn của phần dư lớn (không khớp tốt với dữ liệu đầu vào). Nhánh ngang (bên phải) của hình chữ L đại diện cho vùng bộ lọc hoạt động cao, tương ứng với tham số chính quy hóa lớn, làm cho chuẩn của lời giải lớn nhưng giữ chuẩn của phần dư nhỏ (khớp tốt với dữ liệu đầu vào). Và như vậy, phần góc khuỷu tay của hình chữ L (có ký hiệu chữ C trên hình 1) sẽ là nơi cân bằng giữa mức độ phức tạp của mô hình và mức độ phù hợp với dữ liệu, tức việc chính quy hóa sẽ đạt được hiệu quả tối ưu.



Hình 1: L-curve được vẽ theo tỉ lệ logarit (nguồn: [7], có bổ sung tiếng Việt)

L-curve, đúng như tên gọi, là một giải pháp có tính hình ảnh cao, với nguyên tắc như đã được mô tả bên trên - được lấy làm minh họa cho giải pháp chính quy hóa nói chung. L-curve cung cấp một đại diện trực quan về sự đánh đổi giữa chuẩn (L_2 norm) của lời giải và chuẩn của phần dư. Hình dạng L của nó có thể được giải thích bằng cách xem xét hai thành phần sai số: sai số nhiễu và sai số chính quy hóa. Phần dọc của đường cong L tương ứng với các giải pháp rất nhạy cảm với những thay đổi trong tham số chính quy hóa do sự chi phối của sai số nhiễu (tức là các giá trị nhỏ của α). Phần ngang của đường cong L tương ứng với các giải pháp trong đó chuẩn của phần dư nhạy cảm với tham số chính quy hóa do sự thống trị của sai số chính quy hóa (tức là các giá trị lớn của α). Do đó, góc của đường cong L được mong đợi là điểm cân bằng, đại diện cho giá trị tối ưu của tham số chính quy hóa.

Vị trí chính xác của góc có thể được xác định thông qua giá trị độ cong cực đại hoặc một cách tương đương, bằng cách sử dụng hai điều kiện: độ lõm và tiếp tuyến có độ dốc bằng -1. Trong thực tế, chúng ta có thể đạt được những điều kiện này bằng cách cực tiểu hóa

$$\psi(\alpha) = \|X_\alpha\|.\|AX_\alpha - L\| \qquad (10)$$

Vấn đề chính của giải pháp này là phạm vi (và khoảng thời gian) của các giá trị α sẽ được tìm kiếm. Từ một giá trị ban đầu, phạm vi chọn (xung quanh giá trị này) phải đủ lớn để bao phủ góc khuỷu tay nhưng nên càng nhỏ càng tốt để có được kết quả nhanh chóng. Một cách thức để dung hòa là thu nhỏ dần phạm vi tìm kiếm qua nhiều lần lặp, đồng thời với thu nhỏ bước nhảy để giảm sai số vị trí mục tiêu. Cách thức này sẽ được áp dụng trong các thử nghiệm được trình bày ở phần 3.

2.2. Nhóm giải pháp Quasi-solution và Discrepancy Principle

Đây là nhóm giải pháp chính quy hóa dựa vào các ràng buộc của thông tin tiên nghiệm. Ràng buộc của giải pháp Quasi-solution là chuẩn của lời giải chính xác còn ràng buộc của giải pháp Discrepancy Principle là mức độ sai số. Về mặt tính toán, tham số chính quy hóa cho giải pháp Quasi-solution và Discrepancy Principle sẽ tìm được khi giải phương trình (11) và (12), một cách tương ứng

$$Z(\alpha) = ||X\alpha||^2 - c^2=0 \quad (11)$$

$$Z(\alpha) = ||L||^2 -<X\alpha,A^TL> - \alpha||X\alpha||^2-e^2 = 0 \quad (12)$$

Ở đây, c là ràng buộc tiên nghiệm của lời giải chính xác và e là mức độ sai số đã biết, ký hiệu < > đại diện cho tích vô hướng.

Quasi-solution và Discrepancy Principle được gom chung vào một nhóm giải pháp vì về bản chất chúng hoạt động theo cùng một nguyên tắc:

- Với giá trị c > 0 cho trước, cực tiểu hóa $||AX-L||$ dưới ràng buộc $||X|| \le c$

- Với giá trị e > 0 cho trước, cực tiểu hóa $||X||$ dưới ràng buộc $||AX-L|| \le e$

Việc chọn giải pháp nào là tùy thuộc vào thông tin tiên nghiệm mà chúng ta có: ràng buộc chuẩn lời giải hay mức độ sai số dữ liệu.

2.3. Giải pháp GCV (Generalized Cross Validation)

GCV (Generalized Cross Validation) là một kỹ thuật thường được sử dụng để lựa chọn mô hình và tinh chỉnh tham số, dựa trên nguyên tắc bỏ qua một (leave-one-out): bỏ qua trị đo thứ k, dùng lời giải X_k tương ứng (với bộ dữ liệu bị thiếu này) để dự đoán giá trị bị bỏ qua L_k. Một tham số chính quy hóa tốt sẽ cho ra lời giải có AX_k - L_k là nhỏ nhất (tính trung bình) trên toàn bộ L_k khả dĩ.

Tham số chính quy hóa tối ưu được xác định bằng cách cực tiểu hóa hàm

$$J(\alpha) = \frac{||AX_\alpha - L||}{(trace(I-Q))^2} \quad (13)$$

với $Q = A(A^TA + \alpha I)^{-1}A^T$

2.4. Giải pháp Quasi-optimality

Tương tự giải pháp L-curve, giải pháp Quasi-optimality cũng cố gắng thỏa hiệp giữa sai số dữ liệu và sai số chính quy hóa bằng cách tối thiểu hóa sự thay đổi của giải pháp chính quy hóa so với (sự thay đổi của) tham số chính quy hóa. Giá trị "tối ưu" thu được khi cả hai thành phần sai số là tương đương. Thật ra thì Quasi-optimality tìm kiếm một mức độ chính quy hóa gần với tối ưu về hiệu suất mô hình chứ không nhất thiết phải phù hợp tuyệt đối nhất với dữ liệu, do đó có tên gọi là Quasi-optimality.

Để tính toán, tham số chính quy hóa được xác định thông qua việc cực tiểu hóa hàm

$$J(X,X_{\alpha i}) = ||AX-L||^2 + \alpha||X- X_{\alpha i}||^2 \quad (14)$$

3. Kết quả thử nghiệm và thảo luận

Các giải pháp chính quy hóa giới thiệu bên trên sẽ được áp dụng vào hai thử nghiệm sau đây để kiểm chứng hiệu quả của việc chính quy hóa cũng như để đánh giá và tìm ra giải pháp phù hợp nhất trong một dạng bài toán trắc địa cụ thể.

Bối cảnh bài toán: trong bài báo [3], tác giả trình bày về cách tiếp cận wavelets trong việc nội suy dị thường độ cao, với ưu điểm chính là giữ được tính điều hòa (harmonic) của các đại lượng có nguồn gốc từ thế trọng trường trái đất - vốn dĩ thường được thể hiện dưới dạng bộ hệ số điều hòa. Một bước quan trọng trong quá trình tính toán là việc giải hệ phương trình chuẩn.

$$({K_{rep}}^TPK_{rep})\mathrm{d} - {K_{rep}}^TPf = 0 \quad (15)$$

để xác định vector hệ số tỷ lệ d đóng vai trò như cầu nối giữa đầu vào và đầu ra. Krep được tính toán từ hàm nhân tái tạo (reproducing kernel function), f là dữ liệu đầu vào (dị thường độ cao hoặc các đại lượng thế trọng trường trái đất khác) và P là ma trận trọng số của dữ liệu. Trong trường hợp đơn giản, khi f chỉ được tính từ bộ hệ số điều hòa đến độ và bậc thấp, thì hệ phương trình (15) ổn định và lời giải d đạt được một cách dễ dàng. Tuy nhiên, trong trường hợp phức tạp, khi f được tính đến độ và bậc điều hòa cao cộng thêm nhiễu giả ngẫu nhiên, thì mô hình bị rơi vào tình trạng giả định yếu và lời giải không còn đáng tin cậy, như thể hiện qua thử nghiệm 2 bên dưới. Khi này, hệ thống cần được ổn định bằng một giải pháp chính quy hóa để giúp lời giải có ý nghĩa, mặc dù sẽ phải chấp nhận một sai số nhất định thêm vào từ quá trình chính quy hóa này.

Hai thử nghiệm được thiết kế với ý tưởng tổng quát như sau:

* Thử nghiệm 1 tương ứng với trường hợp đơn giản, tức sử dụng bộ dữ liệu đầu vào hết sức đơn giản để bảo đảm rằng mô hình (15) hoạt động tốt mà không cần bất cứ can thiệp chính quy hóa nào. Và như vậy, nếu vẫn cố tình áp dụng chính quy hóa thì chỉ làm kết quả tệ đi (do sai lệch gây ra bởi chính quá trình chính quy hóa) vì bản thân lời giải ban đầu đã là lời giải chính xác. Khi đó, khác biệt giữa hai kết quả (có và không có chính quy hóa) chính là từ ảnh hưởng của giải pháp chính quy hóa được áp dụng. Thử nghiệm nhiều giải pháp chính quy hóa khác nhau cho cùng một bộ dữ liệu đơn giản này sẽ cung cấp cái nhìn so sánh về sai số của các giải pháp chính quy hóa.

* Thử nghiệm 2 được thiết kế để chứng minh cho hiệu quả của việc áp dụng chính quy hóa trong trường hợp cần thiết. Dữ liệu đầu vào sẽ phức tạp hơn và được thêm vào nhiễu giả ngẫu nhiên đóng vai trò sai số. Trong bối cảnh gần với điều kiện thực tế này, hệ phương trình (15) trở nên mất ổn định dẫn đến kết quả cuối cùng bị sai lệch lớn. Khi đó, việc áp dụng chính quy hóa sẽ giúp ổn định hệ thống (hệ phương trình chuẩn), dẫn đến cải thiện độ chính xác của kết quả cuối cùng. Việc so sánh kết quả cuối cùng (dị thường độ cao) của các trường hợp có và không có áp dụng chính quy hóa so với bộ giá trị tham khảo đã biết (được tạo sẵn, xem như không có sai số) sẽ minh chứng cho hiệu quả của chính quy hóa cũng như giúp đánh giá sai số của bản thân quá trình chính quy hóa gây ra.

3.1. Thử nghiệm 1: Đánh giá sai số của các giải pháp chính quy hóa

Dữ liệu đầu vào là dị thường độ cao được tính từ mô hình EGM 2008, sử dụng bộ hệ số điều hòa đến độ và bậc 10, tính bằng chương trình GeoH [8]. Giá trị dị thường độ cao này được tính cho một mạng lưới "ô vuông" toàn cầu với kích thước ô lưới 6^0 x 6^0 bao gồm (30 x 60 =) 1800 điểm trải dài từ 87^0 vĩ Bắc đến 87^0 vĩ Nam và từ 0^0 kinh đến 354^0 kinh (6^0 kinh Tây). Việc chỉ sử dụng các hệ số điều hòa bậc thấp và tính toán cho các vị trí trên lưới ô vuông (đồng góc theo khoảng cách cầu) là để giữ tính đơn giản cho hệ phương trình (15).

Giải hệ phương trình chuẩn (15) cho các trường hợp: không áp dụng chính quy hóa và có áp dụng lần lượt các giải pháp chính quy hóa một tham số L-curve, Quasi-solution, Discrepancy Principle, GCV, và Quasi-optimality. Với trường hợp có áp dụng chính quy hóa thì việc xác định tham số chính quy hóa tối ưu được tính toán theo như mô tả ở phần 2 và thể hiện ở hàng 1 của bảng 1.

Bảng 1: Sai số của các giải pháp chính quy hóa

Giải pháp Chính quy hóa	Quasi-solutions	Discrepancy principle	L-curve	GCV	Quasi-optimality	Không Chính quy hóa
α	3.54e-27	4.54e-27	2.31e-31	1.70e-31	1.10e-31	0
Sai số (m)	0.05	0.07	4e-6	4e-6	6e-6	3e-11

Sau khi nhận được lời giải cho vector d, các bước tính toán theo [3] được tiếp tục để thu được kết quả cuối cùng là dị thường độ cao cho 1800 vị trí cũ trên lưới đồng góc toàn cầu. So sánh với giá trị đã biết ban đầu, sai số RMS (root-mean-square) cho từng trường hợp được tính toán và thể hiện ở hàng 2 bảng 1.

Trong trường hợp không áp dụng chính quy hóa (α = 0), chênh lệch của kết quả dị thường độ cao so với giá trị đã biết là không có 10^{-11} m, chỉ là sai số tính toán của máy tính). Như vậy, chênh lệch ở các trường hợp còn lại chính là do bản thân quá trình chính quy hóa gây nên. Theo kết quả tổng hợp ở bảng 1 thì sai số do chính quy hóa gây ra cho đại lượng dị thường độ cao trải dài từ mức độ µm đến cm và phân biệt rõ thành hai nhóm: nhóm các giải pháp tiên nghiệm gây sai số ở mức 5 và 7 cm tương ứng với giải pháp Quasi-solutions và Discrepancy principle; và nhóm các giải pháp "tự thân" (không dùng đến các thông tin tiên nghiệm) gồm các giải pháp L-curve, GCV, và Quasi-optimality gây ra sai số tương đương nhau và ở mức độ rất nhỏ (10^{-6} m), hoàn toàn có thể bỏ qua. Việc nhóm giải pháp tiên nghiệm cho kết quả không tốt bằng nhóm giải pháp "tự thân" là có thể dự đoán được, do sự ràng buộc bởi các thông tin tiên nghiệm đã ít nhiều loại trừ tính tối ưu của lời giải. Trong số các giải pháp "tự thân", thì Quasi-optimality có chút khác biệt khi có mức độ tự vận hành cao hơn do không yêu cầu một giá trị khởi đầu α_0 cho tham số chính quy hóa. Do đó, giải pháp Quasi-optimality sẽ được chọn cho thử nghiệm tiếp theo.

3.2. Thử nghiệm 2: Áp dụng chính quy hóa cho mô hình mất ổn định

Nếu như thử nghiệm 1 áp dụng chính quy hóa cho bộ dữ liệu đơn giản vốn không cần chính quy hóa thì thử nghiệm 2 này sẽ cho thấy vai trò không thể thiếu của chính quy hóa khi trong thực tế chúng ta phải đối mặt với những bối cảnh phức tạp.

Dữ liệu đầu vào là dị thường độ cao được tính tới độ và bậc điều hòa 900 (mô hình EGM2008, tính bằng chương trình GeoH) tại 5796 vị trí phân bố không theo quy luật (giống như vị trí đo đạc thực tế). Việc số liệu được cung cấp ở vị trí ngẫu nhiên và có bậc và độ điều hòa cao (hơn hẳn so với thử ngiệm 1) sẽ gây phức tạp cho hệ thống. Bên cạnh đó, một nhiễu giả ngẫu nhiên có độ lệch chuẩn 5cm được thêm vào giá trị dị thường độ cao đầu vào, đóng vai trò như sai số đo đạc, làm cho mô hình nhạy cảm (với sai số) hơn và gần với thực tế. Cả ba yếu tố: việc phân bố không theo quy luật, dữ liệu ở bậc và độ điều hòa cao, cộng với sai số; góp phần gây ra tình trạng giả định yếu của (15) mà nếu không áp dụng chính quy hóa thì sai số đầu vào 5 cm sẽ gây ra sai số đầu ra lên đến 1.55 m, như được trình bày rõ hơn bên dưới.

Hệ phương trình chuẩn (15) sẽ được giải cho trường hợp không áp dụng và có áp dụng chính quy hóa. Với trường hợp có áp dụng chính quy hóa, bên cạnh giải pháp chính quy hóa một tham số Quasi-optimality đã được chọn bên trên, một đại diện chính quy hóa nhiều tham số là giải pháp GBE cũng sẽ được áp dụng để so sánh.

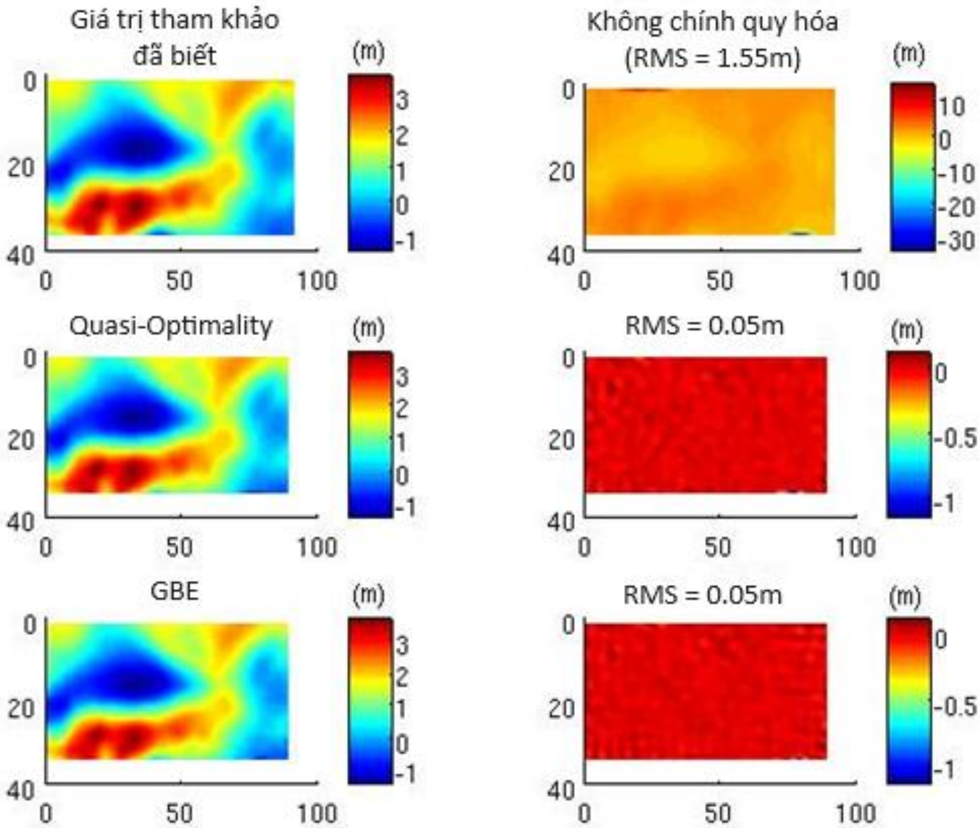
Kết quả đầu ra là dị thường độ cao được tính theo [3] cho (36 x 91 =) 3276 điểm trên lưới ô vuông 0.1^0 x 0.1^0 trải dài từ 46^0 vĩ Bắc đến 49.5^0 vĩ Bắc và từ 9^0 kinh Đông đến 18^0 kinh Đông, bao phủ cùng khu vực với các vị trí dữ liệu đầu vào. Việc chọn lưới đồng góc đầu ra là để dễ so sánh với bộ dữ liệu tham khảo và dễ hiển thị trên hình vẽ. Bộ số liệu tham khảo (hình 2, trên cùng bên trái) là giá trị dị thường độ cao được tính trực tiếp từ cùng một nguồn với dữ liệu đầu vào. Có hai lưu ý ở hình 2: thứ nhất, hệ trục tọa độ ở đây là theo thứ tự hàng (36 hàng từ trên xuống dưới) và cột (91 cột từ trái qua phải) của ô lưới; và thứ hai, giá trị ở đây (cột bên trái) là dị thường độ cao sau khi đã khử thành phần bước sóng dài (bậc và độ dưới 32) cho phù hợp với phạm vi khu vực, nên sẽ nhỏ hơn so với giá trị đầy đủ.

Với trường hợp không áp dụng chính quy hóa, độ lệch giữa kết quả nhận được và số liệu tham khảo được thể hiện ở hình trên cùng bên phải. Ta có thể thấy có những sai số rất lớn ở phần rìa phạm vi khảo sát, và nhìn chung, sai số RMS tính được cho 3276 vị trí có giá trị lên đến 1.55 m. Đây là sai số không thể chấp nhận được khi so với sai số của dữ liệu đầu vào ở mức 5 cm (nhiễu giả ngẫu nhiên). Và rõ ràng cần một giải pháp chính quy hóa ở đây để nhận được một lời giải có ý nghĩa (so với sai số dữ liệu).

Hai giải pháp chính quy hóa lần lượt được áp dụng:

* Giải pháp chính quy hóa một tham số Quasi-Optimality (được đề xuất từ kết quả của thử nghiệm 1) cho kết quả cuối cùng được minh họa trên hình thứ hai bên trái. Về mặt hình ảnh là không thể nhìn ra sự khác biệt với giá trị tham khảo. Độ lệch giữa hai bộ giá trị được thể hiện ở hình thứ hai bên phải với độ lệch RMS là 5 cm, đúng bằng với mức sai số ngẫu nhiên của dữ liệu đầu vào. Điều này cho thấy bản thân quá trình chính quy hóa ở đây gần như không gây ra sai số đáng kể nào trong khi đã giúp ổn định hệ thống rất tốt (so sánh với sai số 1.55 m khi không chính quy hóa). Đương nhiên vẫn tồn tại một ít sai số lớn ở biên khu đo mà vốn dĩ thường khó tránh khỏi khi tính toán cho một khu vực nhỏ (không phải toàn cầu). Những giá trị biên này có thể loại bỏ mà không ảnh hưởng gì nếu phạm vi khu đo đã được tính trừ hao ngay từ thiết kế ban đầu.

* Giải pháp chính quy hóa nhiều tham số GBE được chọn như là một đại diện khác để so sánh với giải pháp một tham số. Về lý thuyết, giải pháp nhiều tham số còn phù hợp hơn cho các bối cảnh phức tạp. Và thử nghiệm với GBE cũng cho kết quả rất tốt với độ lệch RMS cũng khoảng 5 cm, cùng mức độ với nhiễu giả ngẫu nhiên của dữ liệu đầu vào, đồng nghĩa với việc bản thân GBE không gây ra sai số gì đáng kể. Về mặt hình ảnh, kết quả cuối cùng và độ lệch so với bộ dữ liệu tham khảo được thể hiện ở hình dưới cùng bên phải và bên trái, một cách tương ứng.



Hình 2: Kết quả áp dụng chính quy hóa

Như vậy, thử nghiệm 2 đã minh chứng cho khả năng cải thiện tính ổn định hệ thống của giải pháp chính quy hóa, dẫn đến cải thiện độ chính xác tổng thể trong bài toán trắc địa với các đại lượng thế trọng trường trái đất. Ở đây, cả hai giải pháp là Quasi-Optimality (đại diện cho chính quy hóa một tham số) và GBE (chính quy hóa nhiều tham số) đều cho kết quả tốt. Tuy nhiên, nếu xét thêm về tính đơn giản khi tính toán thì giải pháp một tham số sẽ là lựa chọn hợp lý.

4. Kết luận

Để giải quyết vấn đề giả định yếu, chính quy hóa là một lựa chọn cần thiết. Thông qua hai thử nghiệm được thiết kế để khảo sát các giải pháp chính quy hóa khác nhau trong bối cảnh bài toán thế trọng trường trái đất, một số kết luận có thể rút ra như sau:

* Trong số các giải pháp chính quy hóa một tham số, nhóm các giải pháp "tự thân" (lựa chọn tham số dựa trên hiệu suất của chính chúng) như L-curve, GCV, Quasi-optimality có sai số chính quy hóa nhỏ hơn nhóm các giải pháp tiên nghiệm (bị giới hạn bởi ràng buộc tiên nghiệm) như Quasi-solutions và Discrepancy Principle, với sai số tương ứng là 4 đến 6 μm so với 5 đến 7 cm.

* Trong điều kiện phức tạp gần với thực tế như vị trí điểm đo phân bố không theo quy luật, trị đo ở bậc và độ điều hòa cao (thực tế sẽ là tiến tới vô cực), trị đo bị ảnh hưởng bởi sai số đo đạc ngẫu nhiên, thì nếu giải trực tiếp hệ phương trình chuẩn sẽ dẫn đến sai số đầu ra rất lớn, lên đến 1.55 m trong thử nghiệm này. Khi đó, việc áp dụng chính quy hóa là cần thiết. Các giải pháp chính quy hóa được thử nghiệm (Quasi-

optimality và GBE) đều hoạt động tốt và cải thiện lập tức kết quả, khi giảm sai số đầu ra xuống mức 5 cm, tương đương với mức độ sai số ngẫu nhiên của trị đo đầu vào.

* Xét tổng thể về tất cả các yếu tố như mức độ sai số chính quy hóa, khả năng ổn định hệ thống để giảm thiểu sai số đầu ra của một hệ thống giả định yếu, mức độ đơn giản và tốc độ khi tính toán, thì giải pháp chính quy hóa một tham số Quasi-optimality là giải pháp hợp lý nhất trong số các giải pháp đã được khảo sát để áp dụng vào giải hệ phương trình chuẩn trong bài toán thế trọng trường trái đất.❍

Tài liệu tham khảo

[1]. Bouman J (2000) Quality assessment of satellite-based global gravity field models. Publications on Geodesy 48, Netherlands Geodetic Commission, Delft

[2]. Koch KR and Kusche J (2002) Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. Journal of Geodesy 76: 259-268

[3]. Lương Bảo Bình (2022) Ứng dụng wavelets trong nội suy dị thường độ cao. Tạp chí Khoa học Đo đạc & Bản đồ 52: 1 - 8

[4]. Xu P, Fukuda Y, and Liu Y (2006) Multiple parameter regularization: numerical solutions and applications to the determination of geopotential from precise satellite orbits. Journal of Geodesy 80: 17-27

[5]. Schaffrin B (2008) Minimum mean squared error (MSE) adjustment and the optimal Tykhonov-Phillips regularization parameter via reproducing best invariant quadratic uniformly unbiased estimates (repro-BIQUUE). Journal of Geodesy 82: 113-121

[6]. Tikhonov AN and Arsenin VY (1977) Solutions of ill-posed problems. Wiley, Newyork

[7]. Hansen P (1997) Regularization tools, a MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. Version 2.1 for MATLAB 5.0. Department of Mathematical Modeling, Technical University of Denmark

[8]. Lương Bảo Bình (2016) Tính toán dị thường độ cao từ hệ số điều hòa ở độ và bậc nhất định trong dải sóng dài. Tạp chí Phát triển khoa học & công nghệ, Tập 19, K4 - 2016, 11 – 18.❍

Summary

Applying regularization to solve the ill-conditioned normal equations in geopotential problems

Luong Bao Binh, University of Technology – VNUHCM

Regularization, a way to stabilize the solution of normal equations, is an important issue when solving ill-conditioned systems that often occur in geodetic computations. In this paper, some regularization solutions such as GBE, L-curve, Quasi-solution, Discrepancy Principle, GCV, and Quasi-optimality will be introduced and investigated in the context of the problem of processing geopotentila data. The experimental results show the effectiveness of regularization when reducing the output error from 1.55 m (without regularization) to 0.05 m, equivalent to the input error level.❍

Keywords: regularization, ill-conditioned, geopotential